EXERCICE N°3 : 6 points 30 '

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+1 & si \quad x<0 \\ \sqrt{x^2+1}-x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

1°) a) Montrer que pour tout $x<0$, $1-x^2\leq f(x)\leq 1+x^2$.

b) En déduire que f est continue en 0 .

2°) a) Prouver que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1$, en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3°) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

4°) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x^2$.

a) Dresser le tableau de variations de g .

b) En déduire que l'équation $f(x)=x^2$ admet une unique solution α dans $]0,\sqrt{3}[$

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

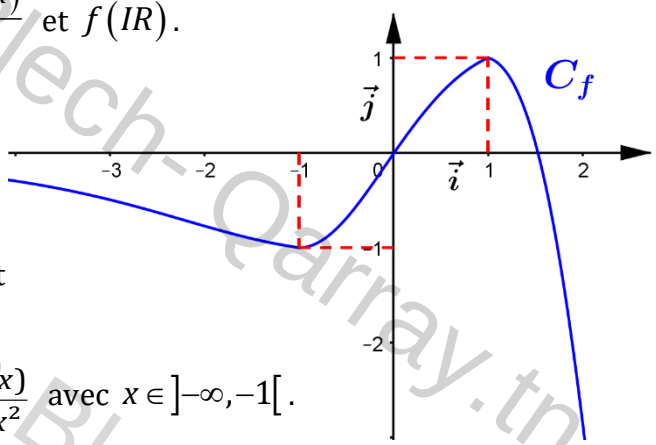
EXERCICE N°4 : 4 points 25 '

La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR.

(C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote d'équation $y=0$ et au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

1°) a) Par une lecture graphique, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $f(IR)$.

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f(x)}{1-x^2}$.



2°) a) Montrer que la fonction composée $f\circ f$ est continue sur IR.

b) En déduire que l'équation $(f\circ f)(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in]-1,1[$.

3°) On considère la fonction h définie par $h(x)=\frac{x f(x)}{1-x^2}$ avec $x\in]-\infty,-1[$.

a) Déterminer $f(]-\infty,-1[)$.

b) En déduire que pour tout $x\in]-\infty,-1[$, on a : $\frac{-x}{1-x^2}\leq h(x)\leq 0$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn

Tous droits réservés © TakiAcademy.com